

A GRUBU

Adı Soyadı:
Numarası:

Cevap Anahtarı

05.11.2021

CEBİRİ QUIZ SORULARI

1) (25p) a) x, y, z, t sıfırdan farklı tam sayılar ve x -i z -ye kalanlı bölümlim, $x = yz + t$ olsun. $(x, z) = (z, t)$ olduğunu gösteriniz.

(25p) b) x, y, q tam sayılar ve q asal olsun. $q | x^2 + y^2$ ve $q | x$ ise $q | y$ olduğunu gösteriniz.

a) $(x, z) = d_1, (z, t) = d_2$ olsun.
 $d_1 = d_2$ old. gösterelim.
 $(x, z) = d_1 \Rightarrow d_1 | x \wedge d_1 | z$
 $\Rightarrow d_1 | x \wedge d_1 | -yz$
 $\Rightarrow d_1 | x - yz \Rightarrow d_1 | t$
 $\Rightarrow d_1 | (z, t)$
 $\Rightarrow d_1 | d_2 \dots (1)$

$(z, t) = d_2 \Rightarrow d_2 | z \wedge d_2 | t$
 $\Rightarrow d_2 | yz \wedge d_2 | t$
 $\Rightarrow d_2 | yz + t \Rightarrow d_2 | x$
 $\Rightarrow d_2 | (x, z)$
 $\Rightarrow d_2 | d_1 \dots (2)$

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilmiştir.

b) $q | x \Rightarrow q | x^2$
ve $q | x^2 + y^2$ old. bilinir
 $\Rightarrow q | x^2 + y^2 \wedge q | x^2$
 $\Rightarrow q | y^2$
 q asal
 $\Rightarrow q | y$

2) (50p) 160186 ve 30082 sayılarının ebobunu Öklid algoritması yoluyla bulunuz ve bu sayıların ebobu k olmak üzere $k = 160186a + 30082b$ olacak şekilde a, b tam sayılarını hesaplayınız.

$$160186 = 5 \cdot 30082 + 9776$$

$$30082 = 3 \cdot 9776 + 754$$

$$9776 = 12 \cdot 754 + 728$$

$$754 = 1 \cdot 728 + \boxed{26}$$

$$728 = 28 \cdot 26 + 0$$

$k = 26$ bulunur.

0 halde $26 = 754 - 1 \cdot 728$

$$= 754 - 1 \cdot (9776 - 12 \cdot 754)$$

$$= 13 \cdot 754 - 1 \cdot 9776$$

$$= 13 \cdot (30082 - 3 \cdot 9776) - 1 \cdot 9776$$

$$= 13 \cdot 30082 - 40 \cdot 9776$$

$$= 13 \cdot 30082 - 40 \cdot (160186 - 5 \cdot 30082)$$

$$= 213 \cdot 30082 - 40 \cdot 160186$$

$$\boxed{a = -40}, \boxed{b = 213}$$

Adı Soyadı:
Numarası:

Caner Arakhan

05.11.2021

CEBİR I QUIZ SORULARI

- 1) (50p) 30082 ve 160186 sayılarının ebobunu Öklid algoritması yoluyla bulunuz ve bu sayıların ebobu d olmak üzere $d = 30082x + 160186y$ olacak şekilde x, y tam sayılarını hesaplayınız.

$$160186 = 5 \cdot 30082 + 9776$$

$$30082 = 3 \cdot 9776 + 754$$

$$9776 = 12 \cdot 754 + 728$$

$$754 = 1 \cdot 728 + \boxed{26}$$

$$728 = 28 \cdot 26 + 0$$

$d = 26$ bulunur

$$\begin{aligned} \text{O halde } 26 &= 754 - 1 \cdot 728 \\ &= 754 - 1 \cdot (9776 - 12 \cdot 754) \\ &= 13 \cdot 754 - 1 \cdot 9776 \\ &= 13 \cdot (30082 - 3 \cdot 9776) - 1 \cdot 9776 \\ &= 13 \cdot 30082 - 40 \cdot 9776 \\ &= 13 \cdot 30082 - 40 \cdot (160186 - 5 \cdot 30082) \\ &= 213 \cdot 30082 - 40 \cdot 160186 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 213}, \boxed{y = -40}$$

- 2) (25p) a) a, b, q, r sıfırdan farklı tam sayılar ve a -yı b -ye kalanlı bölme, $a = qb + r$ olsun. $(a, b) = (b, r)$ olduğunu gösteriniz.

(25p) b) a, b, p tam sayılar ve p asal olsun. $p | a^2 + b^2$ ve $p | a$ ise $p | b$ olduğunu gösteriniz.

a) $(a, b) = d_1$ ve $(b, r) = d_2$ olsun. $d_1 = d_2$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (a, b) = d_1 &\Rightarrow d_1 | a \wedge d_1 | b \\ &\Rightarrow d_1 | a \wedge d_1 | -qb \\ &\Rightarrow d_1 | (a - qb) \\ &\Rightarrow d_1 | r \Rightarrow d_1 | (b, r) \\ &\Rightarrow d_1 | d_2 \quad \text{--- (1) ---} \end{aligned}$$

b) $p | a \Rightarrow p | a^2$
ve $p | a^2 + b^2$ olduğunu biliyoruz.
 $\Rightarrow p | a^2 + b^2 \wedge p | a^2$
 $\Rightarrow p | b^2$
 p asal $\Rightarrow p | b$

$(b, r) = d_2 \Rightarrow d_2 | b \wedge d_2 | r$
 $\Rightarrow d_2 | qb \wedge d_2 | r$
 $\Rightarrow d_2 | qb + r \Rightarrow d_2 | a$
 $\Rightarrow d_2 | (a, b)$
 $\Rightarrow d_2 | d_1 \quad \text{--- (2) ---}$

(1) ve (2) den eşitlik elde edilir $\Rightarrow d_1 = d_2$